36. Условная и абсолютная сходимость метода. Неявный метод Эйлера

Пусть дана задачи Коши для уравнения первого порядка:

{\displaystyle x\_{0}<x\_{1}<\dots <x\_{n}\leq b.}Заменим производную на разностный аналог

Тогда решение находится по рекуррентной формуле

Это отличается от прямого метода Эйлера тем, что функция вычисляется в конечной точке шага, а не в начальной. В отличие от прямого метода, где решение получается явно, здесь необходимо решить уравнение.

Неявный метод Эйлера имеет первый порядок сходимости, но является абсолютно устойчивым, в отличие от явного.

Если поведение решения не зависит от шага , то такой метод называется абсолютно сходящимся, если такая зависимость существует – условно сходящимся.

Определим размер шага, рассмотрев тестовое уравнение . Тогда решение ограниченно, если . Для явного метода Эйлера или при многократном применении требуется, чтобы коэффициент был ограничен . Поэтому явный метод Эйлера устойчив (условно), если , , , но т.к. шаг всегда положителен,   
то .

Аналогично для неявного метода: , . Снова при многократном применении, получаем , требуется ограничение , ,   
получаем или , проще или . При и мы всегда получаем , т.е. неявный метод Эйлера сходится абсолютно (безусловно).